Autour de la logique

Marie-Line Chabanol, Chantal Menini, Géraud Sénizergues

Institut de Mathématiques de Bordeaux/LaRRI, Université de Bordeaux

Opérations logiques

Proposition logique : énoncé qui est ou bien vrai, ou bien faux.
Définition des connecteurs logiques à l'aide des tables de vérité :

- négation
- ou
- et
- implication
- équivalence

Associativité et distributivité des connecteurs et, ou.

Quantificateurs universel et existentiel en S1

1. La proposition
$$\boxed{\forall x \in E,\ p(x)}$$
qui est vraie si ***la proposition* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ *est vraie pour tous les éléments* x *de* E**.
2. La proposition
$$\boxed{\exists x \in E,\ p(x)}$$
qui est vraie s'***il existe au moins un élément* x *de* E *pour lequel* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ *est vraie*** .

Variables muettes, négation d'une propostion quantifiée.

Différents types de raisonnement en S1

1. Raisonnement par contraposée
2. Raisonnement par l'absurde
3. Raisonnement par récurrence : uniquement la récurrence faible.

Ce que l'on ne prend pas le temps de travailler en S1

- Variété du langage mathématique : *x est un réel quelconque* (discours), *posons $S = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n}$* (nom, désigne un objet), *lorsqu'elle existe la limite d'une suite est unique* (proposition), *une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats dépendent du hasard* (définition).
- Symboles qui rendent les variables muettes : quantificateurs, signe somme, signe intégral, flèche de la fonction, ...
- Les implicites : *est vrai* qui est sous-entendu lorsqu'on énonce une proposition dans une propriété, *absence de quantificateur* on comprend alors la proposition comme universellement quantifiée, *un* qui peut signifier *au moins un, pour tout* ou être l'article indéfini (détaillé plus loin).

Un premier exemple d'implicite

1. Si f est une fonction constante alors f est une fonction affine.
2. Si f est une fonction affine alors f est une fonction constante.

Un premier exemple d'implicite

1. Si f est une fonction constante alors f est une fonction affine.
2. Si f est une fonction affine alors f est une fonction constante.

On comprend ces phrases comme universellement quantifiées dans l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions réelles.

Un premier exemple d'implicite

1. Si f est une fonction constante alors f est une fonction affine.
2. Si f est une fonction affine alors f est une fonction constante.

On comprend ces phrases comme universellement quantifiées dans l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions réelles.

1. $\forall f \in \mathscr{F}$, ($f$ constante $\Rightarrow$ f affine).
2. $\forall f \in \mathscr{F}$, ($f$ affine $\Rightarrow$ f constante).

Un premier exemple d'implicite

1. Si f est une fonction constante alors f est une fonction affine.
2. Si f est une fonction affine alors f est une fonction constante.

On comprend ces phrases comme universellement quantifiées dans l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions réelles.

1. $\forall f \in \mathscr{F}$, ($f$ constante $\Rightarrow$ f affine).
2. $\forall f \in \mathscr{F}$, ($f$ affine $\Rightarrow$ f constante).

Et si on remplace $\mathscr{F}$ par l'ensemble des fonctions bornées ?

Implication : exemple des cartes

On dispose de 4 cartes, chacune possède sur un côté une lettre, sur l'autre côté un entier. Elles sont posées, les faces visibles sont $A, B, 4$ et 7.
Combien de cartes AU PLUS devez-vous retourner, et lesquelles, pour déterminer de façon certaine si l'implication suivante est vraie pour toutes les cartes :
"La lettre est une voyelle $\Rightarrow$ le nombre est pair".

Implication : table de vérité

Si P et Q sont deux propositions, $P \Rightarrow Q$ est une nouvelle proposition.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Sa négation est "P ET NON Q".

L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée (NON $Q \Rightarrow$ NON P) ont la même table de vérité.

⚠Dire que $P \Rightarrow Q$ est vraie ne présuppose pas que P est vraie. Ce n'est donc pas la même chose qu'écrire "P donc Q".

⚠Dire que $P \Rightarrow Q$ est vraie ne présuppose pas non plus de relation de causalité explicite, ou de temporalité entre P et Q.

Implication et réciproque

On sait tous que c'est différent, pourtant... Attention au “si, alors” en français qui sous-entend souvent une équivalence.
Exemple : "Si tu n'es pas sage, tu n'auras pas de dessert"
Vraie difficulté avec les étudiants : est-ce que $x > 2 \Rightarrow x \geq 2$?

A quoi sert une implication

A faire des raisonnements, du style “modus ponens” : si on sait que P est vraie, et qu'on sait que $P \Rightarrow Q$ est vraie, on en déduit que Q est vraie : "P et $(P \Rightarrow Q)$ donc Q".

⚠Dire que $P \Rightarrow Q$ est vraie ne présuppose pas que P est vraie. Ce n'est donc pas la même chose qu'écrire "P donc Q".

Pour s'entrainer... pas si facile !

Trouver l'ensemble des entiers n compris entre 1 et 20 tels que l'implication (n pair $\Rightarrow n+1$ premier) est vraie.

Implication et ensemble

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendant d'une variable x d'un ensemble E. On note
$A = \{x \in E, P(x) \text{ est vraie }\}$ et $B = \{x \in E, Q(x) \text{ est vraie}\}$.
On sait $A \cup B = \{x \in E, P(x) \text{ OU } Q(x) \text{ est vraie }\}$ et
$A \cap B = \{x \in E, P(x) \text{ ET } Q(x) \text{ est vraie}\}$.
Qu'est-ce que $\{x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \text{ est vraie }\}$?

Implication et ensemble

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendant d'une variable x d'un ensemble E. On note
$A = \{x \in E, P(x) \text{ est vraie }\}$ et $B = \{x \in E, Q(x) \text{ est vraie}\}$.
On sait $A \cup B = \{x \in E, P(x) \text{ OU } Q(x) \text{ est vraie }\}$ et
$A \cap B = \{x \in E, P(x) \text{ ET } Q(x) \text{ est vraie}\}$.
Qu'est-ce que $\{x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \text{ est vraie }\}$?
En fait on associe souvent l'implication à l'inclusion. Mais $A \subset B$ n'est pas un ensemble, c'est une proposition, qui signifie

Implication et ensemble

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendant d'une variable x d'un ensemble E. On note
$A = \{x \in E, P(x)$ est vraie $\}$ et $B = \{x \in E, Q(x)$ est vraie$\}$.
On sait $A \cup B = \{x \in E, P(x)$ OU $Q(x)$ est vraie $\}$ et
$A \cap B = \{x \in E, P(x)$ ET $Q(x)$ est vraie$\}$.
Qu'est-ce que $\{x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ est vraie $\}$?
En fait on associe souvent l'implication à l'inclusion. Mais $A \subset B$ n'est pas un ensemble, c'est une proposition, qui signifie "$\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$"

Implication et quantificateur

Il est très rare d'avoir une implication "toute seule", dire qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie sous-entend en général que la prémisse peut être vraie ou fausse (SI P, alors Q), donc qu'il s'agit d'une proposition qui dépend d'une variable.
Cette variable sera dans la pratique toujours universellement quantifiée : on rencontre en fait toujours :
$\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

Comment démontrer $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

On prend un x dans E quelconque (“Soit $x \in E$”).
Méthode directe : Si $P(x)$ est faux, l’implication est vraie *(en général, cette étape est sous-entendue)*
Si $P(x)$ est vraie : enchainement de déductions (où on utilise en général d’autres implications) pour arriver à $Q(x)$ vraie.
Méthode par la contraposée :
Si $Q(x)$ est vraie, l’implication est vraie *(en général étape sous-entendue)*
Si $Q(x)$ est fausse : enchainement de déductions (où on utilise en général d’autres implications) pour arriver à $P(x)$ fausse.

Avec la négation

Quelle est la négation de $P \Rightarrow Q$?

Avec la négation

Quelle est la négation de $P \Rightarrow Q$? P ET NON Q
Ce n'est pas une implication...
Quelle est la négation de $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$?

Avec la négation

Quelle est la négation de $P \Rightarrow Q$? P ET NON Q
Ce n'est pas une implication...
Quelle est la négation de $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$?
$\exists x \in E, P(x)$ ET NON $Q(x)$
Explicité dans certains manuels comme "pour montrer qu'une implication est fausse on exhibe un contre-exemple tel que $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse". C'est parce que, sous-entendu, on a un quantificateur universel devant l'implication.

Avec la négation

Quelle est la négation de $P \Rightarrow Q$? P ET NON Q
Ce n'est pas une implication...
Quelle est la négation de $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$?
$\exists x \in E, P(x)$ ET NON $Q(x)$
Explicité dans certains manuels comme "pour montrer qu'une implication est fausse on exhibe un contre-exemple tel que $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse". C'est parce que, sous-entendu, on a un quantificateur universel devant l'implication.
Quelle est la négation de $\exists x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$?

Des quantificateurs partout

Ils apparaissent tard dans les programmes, mais ils sont très souvent sous-entendus.
$\forall x \in E$ est un “ET” généralisé (à tous les x de E).
$\exists x \in E$ est un “OU” généralisé.

Des quantificateurs partout

Ils apparaissent tard dans les programmes, mais ils sont très souvent sous-entendus.
$\forall x \in E$ est un "ET" généralisé (à tous les x de E).
$\exists x \in E$ est un "OU" généralisé.
La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est donc $\exists x \in E, NONP(x)$.

Des quantificateurs partout

Ils apparaissent tard dans les programmes, mais ils sont très souvent sous-entendus.
$\forall x \in E$ est un "ET" généralisé (à tous les x de E).
$\exists x \in E$ est un "OU" généralisé.
La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est donc $\exists x \in E, NONP(x)$.
Que pensez-vous de "*Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner un contre- exemple*" ?

Des quantificateurs partout

Ils apparaissent tard dans les programmes, mais ils sont très souvent sous-entendus.
$\forall x \in E$ est un "ET" généralisé (à tous les x de E).
$\exists x \in E$ est un "OU" généralisé.
La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est donc $\exists x \in E, NONP(x)$.
Que pensez-vous de "*Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner un contre- exemple*" ?
Que pensez-vous de "*Pour montrer qu'une implication est fausse on exhibe un contre-exemple tel que $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse.*" ?

Ambiguité de "UN"

Pour ne pas quantifier, on risque parfois de créer de la confusion...

Ambiguité de "UN"

Pour ne pas quantifier, on risque parfois de créer de la confusion...
Comment quantifier "Un carré est un losange" ?

Ambiguité de "UN"

Pour ne pas quantifier, on risque parfois de créer de la confusion...
Comment quantifier "Un carré est un losange" ?
Comment quantifier "Un triangle rectangle admet un angle droit" ?

Des écritures proches, des sens différents

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, Comment quantifier "f n'est pas la fonction nulle" ?

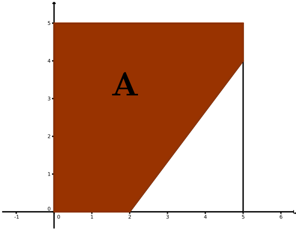
Des écritures proches, des sens différents

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, Comment quantifier "f n'est pas la fonction nulle" ?
Comment quantifier "f ne s'annule pas" ?

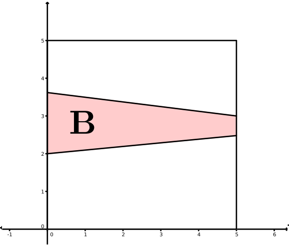
Quand les quantificateurs s'empilent : exercice visuel

Indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On prendra tour à tour $E = A$ puis B puis C.

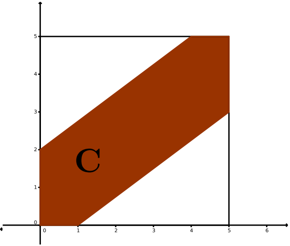
1. $\forall x \in [0,5],\ \exists y \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
2. $\forall y \in [0,5],\ \exists x \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
3. $\exists y \in [0,5],\ \forall x \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
4. $\exists x \in [0,5],\ \forall y \in [0,5],\ (x,y) \in E.$



(a)



(b)



(c)

Difficultés observées chez les étudiants

La négation de $\forall x > 0$ devient $\exists x < 0$

Difficultés observées chez les étudiants

La négation de $\forall x > 0$ devient $\exists x < 0$
En L2-L3 : Pas d'automatisme de traduction ensemble/quantificateurs :

$$x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

Difficultés observées chez les étudiants

La négation de $\forall x > 0$ devient $\exists x < 0$
En L2-L3 : Pas d'automatisme de traduction ensemble/quantificateurs :

$$x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

$$x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

Difficultés observées chez les étudiants

La négation de $\forall x > 0$ devient $\exists x < 0$

En L2-L3 : Pas d'automatisme de traduction ensemble/quantificateurs :

$$x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

$$x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n$$

(Dur !) A votre avis, si (f_n) est une suite de fonctions, que représente

$$\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m \geq n} f_m^{-1}([-1/k, 1/k])$$

Raisonnement par l'absurde

Il repose sur *le principe du tiers exclu* : (P ou *non* P) est vrai,
et sur *le principe de non contradiction* : (P et *non* P) est faux.
On l'utilise souvent pour montrer une non existence ou une unicité.

- $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.

Raisonnement par l'absurde

Quel type de raisonnement pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon\right) \Rightarrow x = 0.$$

Raisonnement par l'absurde

Quel type de raisonnement pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon\right) \Rightarrow x = 0.$$

Possibilité 1 : Supposons qu'il existe $x \neq 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$. On a une contradiction pour $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$.

Raisonnement par l'absurde

Quel type de raisonnement pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon\right) \Rightarrow x = 0.$$

Possibilité 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$, Si $x \neq 0$ alors en prenant $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|x| > \varepsilon$.

Raisonnement par l'absurde

Quel type de raisonnement pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

De la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Par l'absurde : on montre que la négation est fausse.

$$\exists x \in \mathbb{R},\ P(x) \text{ ET NON} Q(x)$$

Raisonnement par l'absurde

Quel type de raisonnement pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

De la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Par contraposée : on montre que la contraposée est vraie.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{NON}\, Q(x) \Rightarrow \mathrm{NON}\, P(x)$$

Raisonnement par l'absurde

Quel type de raisonnement pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \le \varepsilon\right) \Rightarrow x = 0.$$

- Supposons qu'il existe $x \neq 0$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \le \varepsilon$. On a une contradiction pour $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, Si $x \neq 0$ alors en prenant $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|x| > \varepsilon$.

On a le même point clé, le choix entre absurde ou contraposée est plus une question de présentation afin de rendre la démonstration convaincante.

Récurrence : Axiomes de Peano

Ils définissent $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

- A_1 L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
- A_2 Tout entier naturel a un unique successeur.
- A_3 Il n'existe pas d'entier naturel dont le successeur est 0.
- A_4 Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
- $\mathbf{A_5}$ Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Récurrence simple

Soit n_0 un entier, et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ une proposition dépendant de n. Si

(R1) la proposition $P(n_0)$ est vraie ;

(R2) pour tout $n \geq n_0$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.

Alors, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence simple

Soit n_0 un entier, et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ une proposition dépendant de n. Si

(R1) la proposition $P(n_0)$ est vraie ;

(R2) pour tout $n \geq n_0$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.

Alors, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

C'est $\mathbf{A_5}$ pour $E = \{k \in \mathbb{N} \mid P(k+n_0) \text{ vraie}\}$.

Attention R2 est bien une implication universellement quantifiée, même si elle est souvent rédigée : "On suppose qu'il existe un entier n tel que P(n) est vraie...."

Récurrence forte

Soit n_0 un entier, et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ une proposition dépendant de n. Si

(R1) la proposition $P(n_0)$ est vraie ;

(R2) pour tout $n \geq n_0$, $((\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ P(k)) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.

Alors, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence forte

Soit n_0 un entier, et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ une proposition dépendant de n. Si

(R1) la proposition $P(n_0)$ est vraie ;

(R2) pour tout $n \geq n_0$, $((\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ P(k)) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.

Alors, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

C'est $\mathbf{A_5}$ pour $E = \{p \in \mathbb{N} \mid \forall k \in [\![0, p]\!]\ P(k + n_0) \text{ vraie}\}$.

Récurrence double

Soit n_0 un entier, et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ une proposition dépendant de n. Si

(R1) les propositions $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies ;

(R2) pour tout $n \geq n_0$, $((P(n) \text{ ET } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2))$ est vraie.

Alors, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence double

Soit n_0 un entier, et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ une proposition dépendant de n. Si

(R1) les propositions $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies ;

(R2) pour tout $n \geq n_0$, $((P(n) \text{ ET } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2))$ est vraie.

Alors, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

C'est $\mathbf{A_5}$ pour $E = \{k \in \mathbb{N} \mid (P(k+n_0) \text{ ET } P(k+1+n_0)) \text{ vraie}\}$.

Exemples

Quelle récurrence utilise-t-on pour démontrer l'existence d'une décomposition en facteurs premiers pour tout entier n ?

Comment démontrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$, $\forall n \geq 0, u_{n+2} = u_n + nu_{n+1}$ est positive ?

Récurrence en informatique

En informatique la récurrence est souvent utilisée pour des structures définies de façon récursive.
Exemple :
Un **arbre binaire** est tel que chaque sommet a 0, 1 ou 2 enfants.
On peut aussi le définir de la façon suivante : un arbre binaire est :

- Soit vide
- Soit il comporte un noeud racine noté O et 2 sous-arbres binaires A_1 et A_2 disjoints.

Comment démontrer qu'un arbre binaire comportant n sommets possède moins (au sens large) de $\frac{(n+1)}{2}$ feuilles ?

Récurrence : un exemple pour « déranger »

$$P(n) \ : \ 2^n > n^2$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'implication $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la proposition $P(n)$ est vraie ?

Récurrence : un exemple pour « déranger »

$$P(n) \ : \ 2^n > n^2$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'implication $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la proposition $P(n)$ est vraie ?

- des calculs algébriques permettent de vérifier que héréditaire à partir de $n = 3$ mais fausse pour $n = 3$ et $n = 4$,
- vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, mais pas héréditaire pour $n = 1$,
- il n'est pas vrai que « initialisation fausse et hérédité » implique « toujours faux »,

Récurrence : un exemple pour « déranger »

$$P(n) \ : \ 2^n > n^2$$

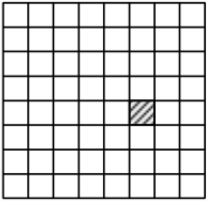
1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'implication $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la proposition $P(n)$ est vraie ?

- des calculs algébriques permettent de vérifier que héréditaire à partir de $n=3$ mais fausse pour $n=3$ et $n=4$,
- vraie pour $n=0$ et $n=1$, mais pas héréditaire pour $n=1$,
- il n'est pas vrai que « initialisation fausse et hérédité » implique « toujours faux »,
- on peut rajouter la question : Pour quels entiers n a t-on $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

Récurrence : un exemple constructif

Le problème[5]**.** Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou (une case), le polymino de taille 2^n est-il pavable par des « triminos en L » ?

Ci-contre, un cas particulier avec $n = 3$
et une position particulière du trou (hachuré).
La taille de ce polymino est donc 8 est son aire est 63.

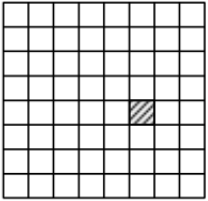


La taille 2^n est le nombre de cases d'un côté, l'aire est le nombre total de cases (une fois le trou décompté).

Récurrence : un exemple constructif

Le problème[5]**.** Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou (une case), le polymino de taille 2^n est-il pavable par des « triminos en L » ?

Ci-contre, un cas particulier avec $n = 3$
et une position particulière du trou (hachuré).
La taille de ce polymino est donc 8 est son aire est 63.



La taille 2^n est le nombre de cases d'un côté, l'aire est le nombre total de cases (une fois le trou décompté).
En considérant les aires on voit qu'une condition nécéssaire à ce que le polymino soit pavable est que 3 divise $2^{2n} - 1$, ce qui est vrai.

Récurrence : un exemple constructif

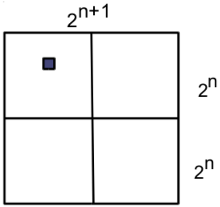
Conjecture : Tout polymino carré de taille 2^n privé d'une case est pavable quelque soit la position du trou.

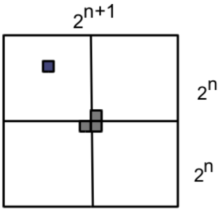
Récurrence : un exemple constructif

Conjecture : Tout polymino carré de taille 2^n privé d'une case est pavable quelque soit la position du trou.
$P(n)$: Quelle que que soit la position du trou, un polymino carré de taille 2^n est pavable par les triminos en L.

Récurrence : un exemple constructif

Conjecture : Tout polymino carré de taille 2^n privé d'une case est pavable quelque soit la position du trou.
$P(n)$: Quelle que que soit la position du trou, un polymino carré de taille 2^n est pavable par les triminos en L.

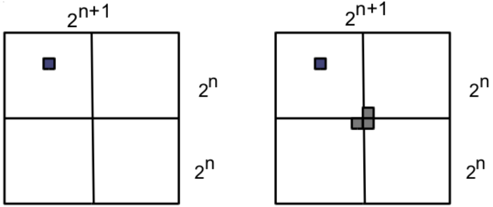




Pour établir l'hérédité, $P(n)$ est utilisé 4 fois.

Récurrence : un exemple constructif

Conjecture : Tout polymino carré de taille 2^n privé d'une case est pavable quelque soit la position du trou.
$P(n)$: Quelle que que soit la position du trou, un polymino carré de taille 2^n est pavable par les triminos en L.



Pour établir l'hérédité, $P(n)$ est utilisé 4 fois.
La preuve fournit un algorithme de pavage, on a peu de chance d'y arriver si on pave au hasard...

Récurrence et descente infinie

$$Q \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \Rightarrow (\exists m < n, \ P(m))$$

Si la proposition Q est vraie alors pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.

Récurrence et descente infinie

$$Q \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \Rightarrow (\exists m < n, \ P(m))$$

Si la proposition Q est vraie alors pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
Cette implication est équivalente à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.

Récurrence et descente infinie

$$Q \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \Rightarrow (\exists m < n, \ P(m))$$

Si la proposition Q est vraie alors pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
Cette implication est équivalente à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.

- $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ vraie}\}$.

Récurrence et descente infinie

$$Q \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \Rightarrow (\exists m < n, \ P(m))$$

Si la proposition Q est vraie alors pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
Cette implication est équivalente à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.

- $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ vraie}\}$.
  Si Q est vraie alors E n'a pas de plus petit élément et $E = \emptyset$.
  Conclusion pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.

Récurrence et descente infinie

$$Q \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \Rightarrow (\exists m < n, \ P(m))$$

Si la proposition Q est vraie alors pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
Cette implication est équivalente à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.

- $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ vraie}\}$.
  Si Q est vraie alors E n'a pas de plus petit élément et $E = \emptyset$.
  Conclusion pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
- $P(n) \ : \ (n \in E)$

Récurrence et descente infinie

$$Q \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \Rightarrow (\exists m < n, \ P(m))$$

Si la proposition Q est vraie alors pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
Cette implication est équivalente à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.

- $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ vraie}\}$.
  Si Q est vraie alors E n'a pas de plus petit élément et $E = \emptyset$.
  Conclusion pour tout entier n, $P(n)$ est fausse.
- $P(n) \ : \ (n \in E)$
  Si E n'a pas de plus petit élément alors Q est vraie et pour tout entier n, $P(n)$ est fausse. Conclusion $E = \emptyset$.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.
- Soit P une proposition telle que $P(0)$ vraie et pour tout entier n, $P(n)$ héréditaire.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.
- Soit P une proposition telle que $P(0)$ vraie et pour tout entier n, $P(n)$ héréditaire.
  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ faux}\}$

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.
- Soit P une proposition telle que $P(0)$ vraie et pour tout entier n, $P(n)$ héréditaire.
  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ faux}\}$
  $0 \notin E$.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.
- Soit P une proposition telle que $P(0)$ vraie et pour tout entier n, $P(n)$ héréditaire.
  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ faux}\}$
  $0 \notin E$. $\forall n \geq 1, (\ n \in E \Rightarrow n-1 \in E)$.

Récurrence et plus petit élément

L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

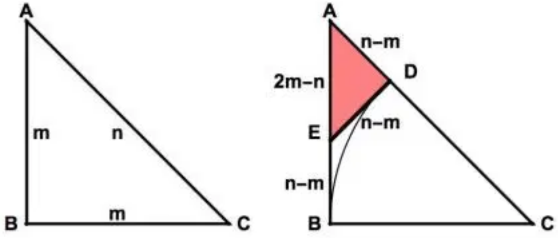
- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.
- Soit P une proposition telle que $P(0)$ vraie et pour tout entier n, $P(n)$ héréditaire.
  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ faux}\}$
  $0 \notin E$. $\forall n \geq 1, (\ n \in E \Rightarrow n-1 \in E)$. E n'a pas de plus petit élément.

Récurrence et plus petit élément

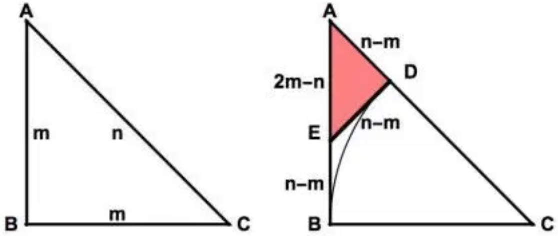
L'axiome de récurrence est équivalent à ce que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément.
Elle peut donc en fait s'utiliser avec d'autres ensembles et d'autres relations d'ordre, pourvu que toute partie non vide de l'ensemble admette un plus petit élément. (*ordre bien fondé*)

- Soit E une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément.
  $P(n) : (\forall p \leq n,\ p \notin E)$
  $P(0)$ vraie. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
  Conclusion : pour tout entier n, $P(n)$ est vraie, donc $E = \emptyset$.
- Soit P une proposition telle que $P(0)$ vraie et pour tout entier n, $P(n)$ héréditaire.
  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ faux}\}$
  $0 \notin E$. $\forall n \geq 1, (\ n \in E \Rightarrow n-1 \in E)$. E n'a pas de plus petit élément.
  Conclusion : $E = \emptyset$ donc pour tout entier n, $P(n)$ vraie.

Descente infinie : irrationnalité de $\sqrt{2}$



Descente infinie : irrationnalité de $\sqrt{2}$



S'il existe deux entiers n et m tels que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ alors il existe deux entiers $n' < n$ et $m' < m$ tels que $\sqrt{2} = \frac{n'}{m'}$.

Négation

P	NON P
V	F
F	V

Négation

P	NON P
V	F
F	V

Principe du tiers exclu : (P OU NON P) est vrai.
Principe de non contradiction : (P ET NON P) est faux.

Négation et implication, négation et quantificateurs

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est

Négation et implication, négation et quantificateurs

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est P ET NON Q.

Négation et implication, négation et quantificateurs

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est P ET NON Q.
- La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est

Négation et implication, négation et quantificateurs

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est P ET NON Q.
- La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est $\exists x \in E,$ NON $P(x)$.

Négation et implication, négation et quantificateurs

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est P ET NON Q.
- La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est $\exists x \in E,$ NON $P(x)$.
- La négation de $(\exists x \in E,\ P(x))$ est

Négation et implication, négation et quantificateurs

- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est P ET NON Q.
- La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est $\exists x \in E$, NON $P(x)$.
- La négation de $(\exists x \in E,\ P(x))$ est $\forall x \in E$, NON $P(x)$.

Déjà évoqué

- Le raisonnement par l'absurde repose sur les principes du tiers exclu et de non contradiction, on l'utilise souvent pour montrer une non existence ou une unicité. Il est souvent adapté pour les problèmes concerant l'infini. Exemples : $\frac{1}{3}$ *n'est pas décimal,* $\sqrt{2}$ *est irrationnel, l'ensemble des nombres premiers est infini, unicité de la limite d'une suite.*

Déjà évoqué

- Le raisonnement par l'absurde repose sur les principes du tiers exclu et de non contradiction, on l'utilise souvent pour montrer une non existence ou une unicité. Il est souvent adapté pour les problèmes concerant l'infini. Exemples : $\frac{1}{3}$ *n'est pas décimal,* $\sqrt{2}$ *est irrationnel, l'ensemble des nombres premiers est infini, unicité de la limite d'une suite.*
- Que penser de "pour montrer qu'une proposition est fausse, on exhibe un contre-exemple" ?

Déjà évoqué

- Le raisonnement par l'absurde repose sur les principes du tiers exclu et de non contradiction, on l'utilise souvent pour montrer une non existence ou une unicité. Il est souvent adapté pour les problèmes concerant l'infini. Exemples : $\frac{1}{3}$ *n'est pas décimal,* $\sqrt{2}$ *est irrationnel, l'ensemble des nombres premiers est infini, unicité de la limite d'une suite.*
- Que penser de "pour montrer qu'une proposition est fausse, on exhibe un contre-exemple" ?
  Vrai uniquement si on prend la négation d'une proposition universellement quantifiée.

Négation dans la langue française

P : “Toutes les boules ne sont pas rouges.”

Négation au sens mathématique de P ?
N1 : “Toutes les boules sont rouges.”
N2 : “Certaines boules sont rouges.”
N3 : “Certaines boules ne sont pas rouges.”

Négation dans la langue française

P : “Toutes les boules ne sont pas rouges.”

Négation au sens mathématique de P ?
N1 : “Toutes les boules sont rouges.”
N2 : “Certaines boules sont rouges.”
N3 : “Certaines boules ne sont pas rouges.”
Meilleure formulation de P :

Négation dans la langue française

P : “Toutes les boules ne sont pas rouges.”

Négation au sens mathématique de P ?
N1 : “Toutes les boules sont rouges.”
N2 : “Certaines boules sont rouges.”
N3 : “Certaines boules ne sont pas rouges.”
Meilleure formulation de P : “Au moins une boule n’est pas rouge.”

Négation dans la langue française

P : “Toutes les boules ne sont pas rouges.”

Négation au sens mathématique de P ?
N1 : “Toutes les boules sont rouges.”
N2 : “Certaines boules sont rouges.”
N3 : “Certaines boules ne sont pas rouges.”
Meilleure formulation de P : “Au moins une boule n’est pas rouge.”
Négation : N1

Négation dans la langue française

P : "Toutes les boules ne sont pas rouges."

Négation au sens mathématique de P ?
N1 : "Toutes les boules sont rouges."
N2 : "Certaines boules sont rouges."
N3 : "Certaines boules ne sont pas rouges."
Meilleure formulation de P : "Au moins une boule n'est pas rouge."
Négation : N1
"Toutes les boules ne sont pas rouges" signifie : les boules ne sont pas toutes rouges. Mais elle est parfois comprise comme "Toutes les boules sont non rouge", c'est-à-dire comme "Aucune boule n'est rouge".

CN - CS

Lorsque l'on sait que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est **vraie** on dit que

- P est une condition

CN - CS

Lorsque l'on sait que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est **vraie** on dit que

- P est une condition suffisante pour Q.

CN - CS

Lorsque l'on sait que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est **vraie** on dit que

- P est une condition suffisante pour Q.
  Si P est vrai alors Q est vrai. Mais on peut avoir Q vrai et P faux.

CN - CS

Lorsque l'on sait que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est **vraie** on dit que

- P est une condition suffisante pour Q.
  Si P est vrai alors Q est vrai. Mais on peut avoir Q vrai et P faux.
- Q est une condition

CN - CS

Lorsque l'on sait que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est **vraie** on dit que

- P est une condition suffisante pour Q.
  Si P est vrai alors Q est vrai. Mais on peut avoir Q vrai et P faux.
- Q est une condition nécessaire pour P.

CN - CS

Lorsque l'on sait que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est **vraie** on dit que

- P est une condition suffisante pour Q.
  Si P est vrai alors Q est vrai. Mais on peut avoir Q vrai et P faux.
- Q est une condition nécessaire pour P.
  Si Q est faux alors P est faux. Mais on peut avoir Q vrai et P faux.

Quelques ressources

- Textes rassemblés par la CII Lycée :
  `http://www.univ-irem.fr/spip.php?article779`
- Logique au collge, groupe Logique IREM de Paris
- Article récent sur le raisonnement par l'absurde :
  Dominique Bernard et al., Le raisonnement par l'absurde une étude didactique pour le lycée, Petit x 108 (2018)
- Exemples pour la récurrence issus de :
  Denise Grenier, Une étude didactique du concept de récurrence, Petit x 88 (2012)