LOGIQUE

Quelques théories du premier ordre

NB : $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ sont des notations formelles usuelles pour ET, OU, $\Rightarrow$ et NON.
$S(x)$ désigne le successeur de x.

EG (Théorie de l' égalité)
REF : $\forall x \;\; x = x$
SYM : $\forall x, y \;\; (x = y \to y = x)$
TRANS : $\forall x, y, z \;\; (x = y \wedge y = z) \to x = z)$
COMPF : $\forall \vec{x}, \vec{y} \;\; (\vec{x} = \vec{y} \to f(\vec{x}) = f(\vec{y}))$
COMPR : $\forall \vec{x}, \vec{y} \;\; (\vec{x} = \vec{y} \to R(\vec{x}) \to R(\vec{y}))$

P0 (Arithmétique élémentaire)
Tous les axiomes de EG ;
A1 : $\forall x \;\; \neg S(x) = 0$
A2 : $\forall x \;\; (x = 0 \vee \exists y, x = S(y)$
A3 : $\forall x, y \;\; (S(x) = S(y) \to x = y)$
A4 : $\forall x \;\; (x + 0 = x)$
A5 : $\forall x, y \;\; (x + S(y) = S(x + y))$
A6 : $\forall x \;\; (x \times 0 = 0)$
A7 : $\forall x, y \;\; (x \times S(y) = x \times y + x)$

PA (Arithmétique de Péano)
Tous les axiomes de $\mathbb{P}0$;
REC_Φ : $(\Phi(0) \wedge (\forall x(\Phi(x) \to \Phi(S(x)))) \to \forall x \Phi(x)$
pour toutes les formules $\Phi(x)$;

MO (Théorie des monoïdes)
Tous les axiomes de EG ;
ASS : $\forall x, y, z \;\; x * (y * z) = (x * y) * z$
NE : $\forall x \;\; (x * e = x \;\; \wedge \;\; e * x = x)$

GR (Théorie des groupes)
Tous les axiomes de MO ;
INV : $\forall x \;\; (x * I(x) = e \;\; \wedge \;\; I(x) * x = e)$

CORPS (Théorie des corps)
Tous les axiomes de EG pour $+$ et $\times$.
Tous les axiomes de MO pour $+$ et $\times$:
ASS+ : $\forall x, y, z \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$
NE+ : $\forall x \;\; (x + 0 = x \;\; \wedge \;\; 0 + x = x)$
ASS$\times$: $\forall x, y, z \;\; x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
NE$\times$: $\forall x \;\; (x \times 1 = x \;\; \wedge \;\; 1 \times x = x)$
La commutativité de $+$ et $\times$:
COM+ : $\forall x, y \;\; x + y = y + x$
COM$\times$: $\forall x, y \;\; (x \times y = y \times x)$
Les axiomes d'inversion pour $+$ et $\times$:
INV+ : $\forall x \;\; (x + M(x) = 0 \;\; \wedge \;\; M(x) + x = 0)$
INV$\times$: $\forall x \;\; (\neg x = 0) \rightarrow (x \times I(x) = 1 \;\; \wedge \;\; I(x) \times x = 1)$
Distributivité :
DIST : $\forall x, y, z \;\; x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z$
Le monoide multiplicatif n'est pas réduit à 0 :
UNneqNUL :$\neg(1 = 0)$

CORPORD (Théorie des corps ordonnés)
Tous les axiomes de CORPS ;
STRICT : $\neg 0 < 0$
LIN : $\forall x \;\; 0 < x \vee x = 0 \vee x < 0$
TRANSI : $\forall x, y, z \;\; (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
COMP+ : $\forall x, y, z \;\; (x < y) \rightarrow x + z < y + z$
COMP$\times$:$\forall x, y, z \;\; (x < y \wedge 0 < z) \rightarrow x \times z < y \times z$
Definition de la valeur absolue :
DEFABS :$\forall x \;\; (x = 0 \rightarrow \mathrm{abs}(x) = 0) \wedge (x < 0 \rightarrow \mathrm{abs}(x) = M(x)) \wedge (0 < x \rightarrow \mathrm{abs}(x) = x)$