NOM :

Autonomie 6 :

A rendre le

Point cours :
Soient f une fonction définie sur son domaine de définition D et I un intervalle de D.
• f est strictement croissante sur I si et seulement si f conserve l'ordre sur I c'est-à-dire si $a < b$ alors $f(x) < f(b)$.
• f est strictement décroissante sur I si et seulement si f change l'ordre sur I c'est-à-dire si $a < b$ alors $f(x) > f(b)$.

Application : :
Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.
Rappeler le tableau de variation de la fonction carré :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

Comment comparer deux images ?
• On veut comparer $f(-2) = (-2)^2$ et $f(-1) = (-1)^2$.
On a $-2 < -1$. Or f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, donc f change l'ordre :
on a alors $f(-2) > f(-1)$ c'est-à-dire $(-2)^2 > (-1)^2$.
• On veut comparer $f(\pi)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$.
On a $\sqrt{2} < \pi$. Or f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc f conserve l'ordre :
on a alors $f\left(\sqrt{2}\right) < f(\pi)$ c'est-à-dire $\sqrt{2}^2 < \pi^2$.

Comment encadrer une valeur ?
• On veut encadrer x^2 lorsque $x \in [3; 5]$.
$3 \leqslant x \leqslant 5$ or f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc f conserve l'ordre :
$f(3) \leqslant f(x) \leqslant f(5)$ c'est-à-dire $9 \leqslant x^2 \leqslant 25$.
• On veut encadrer x^2 lorsque $x \in [-6; -2]$.
$-6 \leqslant x \leqslant -2$ or f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc f change l'ordre :
• $f(-6) \geqslant f(x) \geqslant f(-2)$ c'est-à-dire $36 \geqslant x^2 \geqslant 4$.

Exercice 1: Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$.

1. Rappeler le tableau de variation de la fonction cube :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

2. On veut comparer $(-3)^3$ et $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^3$.

   On a ... < ... . Or la fonction cube est strictement ... sur ... ,

   donc elle ... l'ordre : on a alors $(-3)^3 \ldots \left(-\dfrac{7}{8}\right)^3$.

3. On veut encadrer x^3 lorsque $x \in [\ 2\ ;\ \sqrt{5}\ [$.
   $2\ \ldots\ x\ \ldots\ \sqrt{5}$ or f est strictement ... sur ... ,
   donc elle ... l'ordre : on a alors $2^3\ \ldots\ x^3\ \ldots\ \sqrt{5}^3$.

Exercice 2:
Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Rappeler le tableau de variation de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

2. Soit a un réel tel que $a < -2$.
   On veut comparer $\dfrac{1}{a}$ et $-\dfrac{1}{2}$.
   On a $a < -2$. Or la fonction inverse est strictement ... sur ... ,
   donc elle ... l'ordre : on a alors $\dfrac{1}{a} \ldots -\dfrac{1}{2}$.

Comment déterminer le sens de variation d'une fonction définie sur un intervalle donné ?

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -2x^2 + 7$.
Soient a et b deux réels de l'intervalle $]0;+\infty[$ tels que $a < b$.

	Décomposition	Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$	
	x	$0 < a < b$	
élever au carré			conserve l'ordre car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
	x^2	$a^2 < b^2$	
multiplier par -2			change l'ordre
	$-2x^2$	$-2a^2 > -2b^2$	
ajouter 7			conserve l'ordre
	$-2x^2+7$	$-2a^2+7 > -2b^2+7$	
		$f(a) > f(b)$	

Conclusion : La fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 7$ change l'ordre sur $]0;+\infty[$, elle est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par $f(x) = -2x^2 + 7$.
Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty;0[$ tels que $a < b$.

	Décomposition	Comparaison de $f(a)$ et $f(b)$	
	x	$a < b < 0$	
élever au carré			... l'ordre car la fonction carrée est strictement ... sur $]-\infty;0[$
	x^2	$a^2 \ \ldots \ b^2$	
multiplier par -2			... l'ordre
	$-2x^2$	$-2a^2 \ \ldots \ -2b^2$	
ajouter 7			... l'ordre
	$-2x^2+7$	$-2a^2+7 \ \ldots \ -2b^2+7$	
		$f(a) \ \ldots \ f(b)$	

Conclusion : La fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 7$ ... l'ordre sur $]-\infty;0[$, elle est donc strictement ... sur $]-\infty;0[$.

Exercice 4: Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 4-(x-1)^2$.
On veut encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [2;5]$.

	Décomposition	Encadrement de $f(x)$	
	x	$2 \leqslant x \leqslant 5$	
soustraire 1			... l'ordre
	$x-1$	$0 < 1 \ \ldots \ x-1 \ \ldots \ 4$	
élever au carré			... l'ordre car la fonction carrée est strictement ... sur $]0;+\infty[$
	$(x-1)^2$	$1 \ \ldots \ (x-1)^2 \ \ldots \ 16$	
multiplier par -1			... l'ordre
	$-(x-1)^2$	$-1 \ \ldots \ -(x-1)^2 \ \ldots \ -16$	
ajouter 4			... l'ordre
	$4-(x-1)^2$	$3 \ \ldots \ f(x) \ \ldots \ -12$	

Conclusion : Ainsi pour $x \in [2;5]$, on a $3 \ \ldots \ f(x) \ \ldots \ -12$.